Unidad 3
Tensiones y deformaciones Normales en Sistemas Hiperestáticos

3.1 Objetivos

Al terminar el estudio de esta unidad usted deberá ser capaz de resolver los siguientes objetivos trazados para el Estudio de tensiones normales y cortantes en sistemas Hiperestáticos.

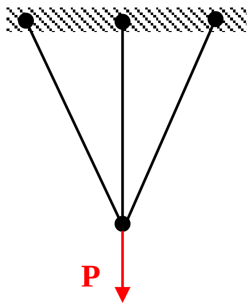
1. Conocer cuales son los sistemas estructurales Hiperestáticos y su grado de hiperestaticidad de las mismas.
2. Explicar porque un sistema se convierte en hiperestàtico.
3. Listar los pasos para dar solución a un sistema hiperestàtico.
4. Analizar sistemas hiperestáticos sometidos a cargas externas, errores de montaje o variaciones de temperatura; determinando sus fuerza, tensiones, deformaciones y desplazamientos de cada uno de los elementos o barras elásticas que componen el sistema.
5. Conociendo sus materiales, propiedades, tensiones y deformaciones normales de los distintos elementos que componen el sistema hiperestático, tenemos que saber dimensionar las secciones necesarias de los mismos.
6. Analizar las tensiones y deformaciones en cilindros de pared delgada, sometidos a presión.

3.2 Introducción

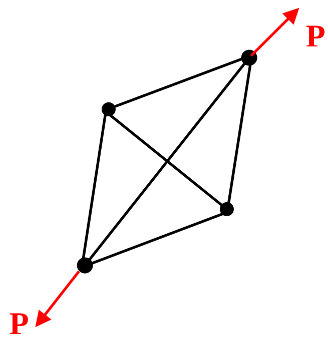
Un sistema hiperestàtico o estáticamente indeterminado, es aquel en cual no es posible determinar las fuerzas internas de sus elementos debido a que el numero de incógnitas excede al numero de ecuaciones que nos brinda la estática. Físicamente un sistema se convierte en hiperestàtico cuando el numero de sus elementos (incluyendo soportes) es mayor que el numero necesario para guardar su equilibrio estático; hay que aclarar que estos elementos adicionales llamados vínculos superfluos no garantizan el equilibrio de una estructura, si no vienen dados por exigencias de rigidez y resistencia .

El grado de hiperestaticidad de un sistema estructural lo determina el número de vínculos superfluos o elementos en exceso que tenga.

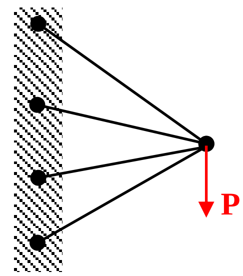
Ejemplo:



1^er grado de hiperestaticidad



1^er grado de hiperestaticidad



2^er grado de hiperestaticidad

3.3 Metodología de solución

En general, para dar solución a un sistema hiperestàtico se debe seguir los siguientes pasos que por su importancia los describimos como partes:

a) Parte geométrica

Se propone como se deforma los elementos que componen el sistema estructural partiendo de la condición que las deformaciones son conjuntas y mediante una relación geométrica entre las deformaciones de los elementos se plantean las **Ecuaciones de Compatibilidad de Deformación.** El numero de estas ecuaciones que se deben plantear esta en función del grado de hiperestaticidad del sistema, si es de primer grado se planteara una, si es de segundo grado se plantearan dos y así sucesivamente.

$$\boxed{\text{Ecuaciones : } f\ (\Delta L_i)}$$

En la practica para construir estas ecuaciones se sigue los siguienter pasos:

- Se dibuja un diagrama de cuerpo libre mostrando todos sus elementos incognitos en un estado no deformado **(Estado inicial)**
- Se propone un diagrama de curpo libre deformado **(Estado final)** asumiendo el alargamiento y acortamiento de las barras incógnitas, manteniendo el principio que las deformaciones de las barras son en conjunto y haciendo cumplir las restricciones de movimientos de los apoyos ,articulaciones y barras rigidas que nos plantea la estructura..

- Del análisis de las deformaciones propuestas, por medio de comparaciones geometricas se crean relaciones entre las deformaciones incógnitas, llamadas ecuaciones de compatibilidad de deformación.

b) Parte estática

Partiendo del conocimiento de las deformaciones (alargamientos, acortamientos) asumidas en la parte geometrica adoptamos el sentido de las fuerzas internas de las barras incognitas y mediante las ecuciones que nos brinda la estática construimos relaciones de equilibrio que nos vinculan las fuerzas internas. Llamadas **Ecuaciones de Equilibrio Estático.**

Ecuaciones : f (N_i)

c) Parte física (Ley de Hooke)

Para cada elemento isostático que compone el sistema estructural hiperestático, se plantean las ecuaciones que relacionan las deformaciones incognitas en función de las fuerzas internas normales incognitas llamadas **Ecuaciones Físicas.**

Ecuacion para cada elemento incognito $$\Delta L_i = \frac{N_i * L_i}{E_i * A_i}$$

d) Parte final

Una vez aplicada las ecuaciones fisicas ya se en la parte geometrica o en la parte estática, se contruye un sistema de ecuaciones de tal forma que las incognitas sean las deformaciones o los esfuerzos internos, y se procede a resolver, determinando la solucion al problema.

3.4 Problemas

3.4.1 Generales

Ejemplo 1

Sean tres barras de un sistema colgante hiperestático como muestra la figura, las barras laterales son idénticas y de cobre, la barra central es de acero, ¿que tensión se produce en las barras bajo la acción de una fuerza P?.

Datos

E cu

E ac

A cu

A ac

P

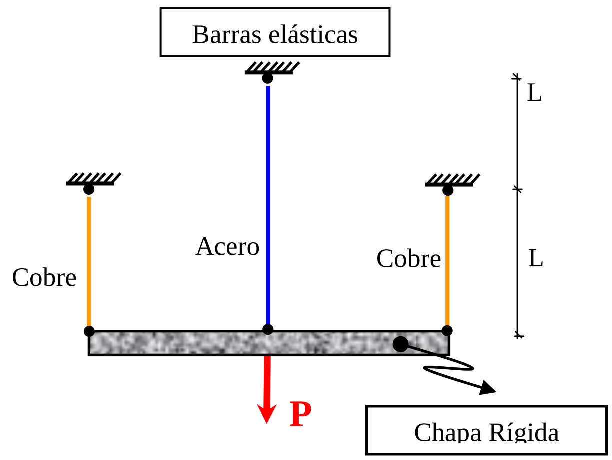
L

D

Incógnitas

$\sigma_{cu} = ?$

$\sigma_{ac} = ?$

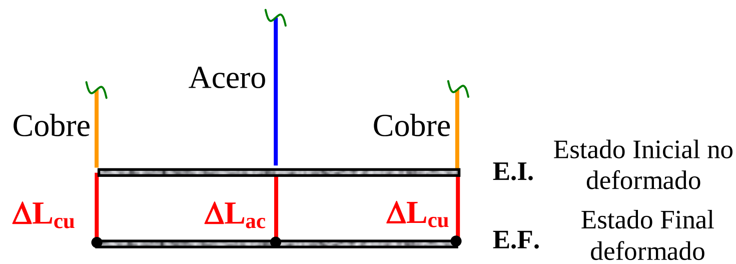


Solución:

a) Parte Geométrica:

$$\boxed{\Delta L_{ac} = \Delta L_{cu}} \quad ①$$

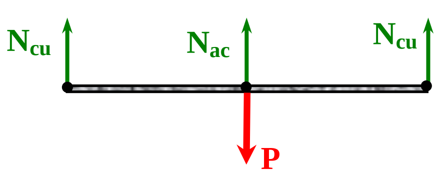
Ecuación de compatibilidad de deformaciones



ΔL_{cu} = alarga, entonces N_{cu} (tracción)

ΔL_{ac} = alarga, entonces N_{ac} (tracción)

b) Parte estática:



$$\sum F_V = 0$$

$$\boxed{2N_{cu} + N_{ac} = P} \quad ②$$

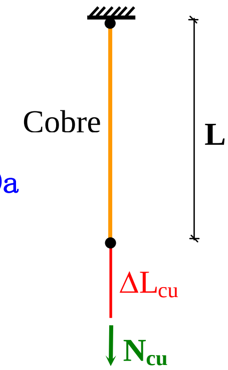
Ecuación equilibrio estático

c) Parte física

c1) Barra Cu:

$$\boxed{\Delta L_{cu} = \frac{N_{cu} * L_{cu}}{E_{cu} * A_{cu}}} \quad ③a$$

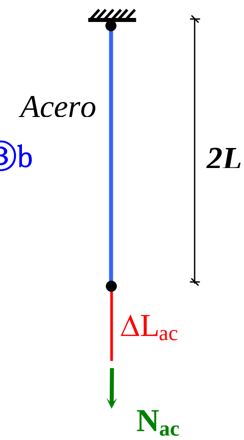
Ecuación física



c2) Barra Ac

$$\boxed{\Delta L_{ac} = \frac{N_{ac} * 2L_{ac}}{E_{ac} * A_{ac}}} \quad ③b$$

Ecuación física



c) Parte final

Reemplazando las ecuaciones físicas ③a y ③b en ①

$$\frac{N_{ac} * 2L_{ac}}{E_{ac} * A_{ac}} = \frac{N_{cu} * L_{cu}}{E_{cu} * A_{cu}}$$

$$N_{ac} = \frac{E_{ac} * A_{ac}}{2 * E_{cu} * A_{cu}} * N_{cu} \qquad \text{Donde:} \quad c_1 = \frac{E_{ac} * A_{ac}}{2 * E_{cu} * A_{cu}}$$

$$N_{ac} = \boxed{c_1 * N_{cu}} \quad ④$$

④ en ②

$$2N_{cu} + c_1 * N_{cu} = P$$

$$⑤ \quad \boxed{N_{cu} = \frac{P}{2 + c_1}} \longrightarrow \qquad \sigma_{cu} = \frac{N_{cu}}{A_{cu}}$$

⑤ en ④

$$\boxed{N_{ac} = c_1 * \frac{P}{2 + c_1}} \longrightarrow \qquad \sigma_{ac} = \frac{N_{ac}}{A_{ac}}$$

Ejemplo 2

Determinar las tensiones normales en las barras elásticas de acero mostradas en la figura además calcular el desplazamiento vertical del punto A

Datos

$E_{cu} = 1.2X10^6$ Kg/cm^2

$E_{ac} = 2.1X10^6$ Kg/cm^2

$A_1 =$ 6 cm^2

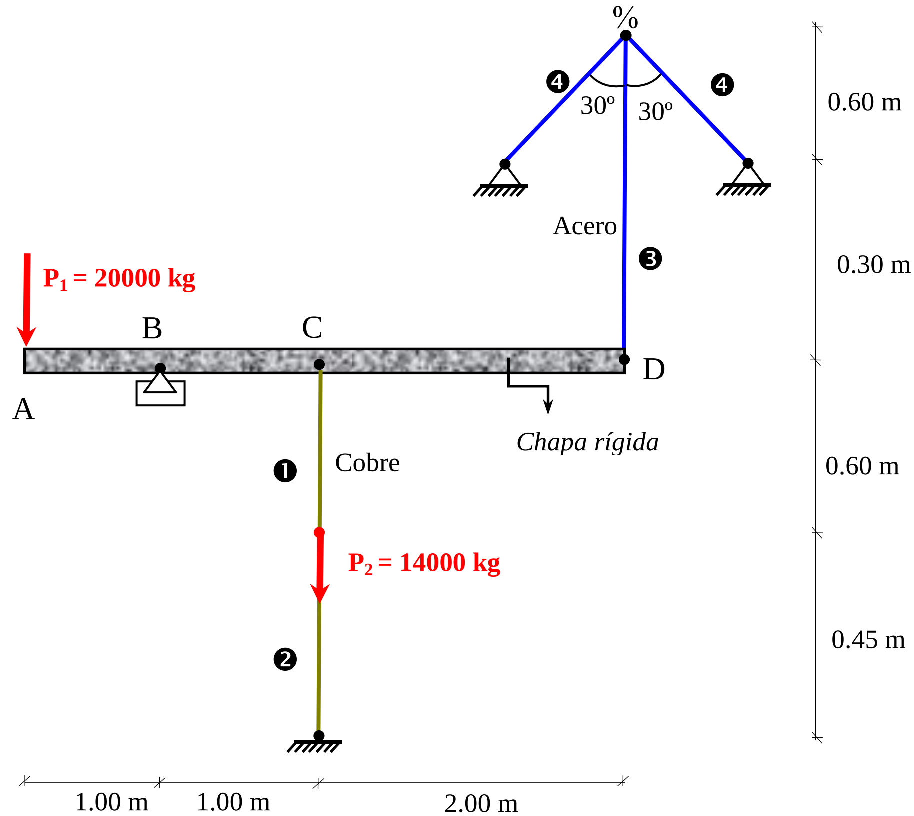
$A_2 =$ 6 cm^2

$A_3 =$ 6 cm^2

$A_4 =$ 4 cm^2

$P_1 =$ 20000 kg

$P_2 =$ 14000 kg



Incógnitas

$\sigma_1 = ?$

$\sigma_2 = ?$

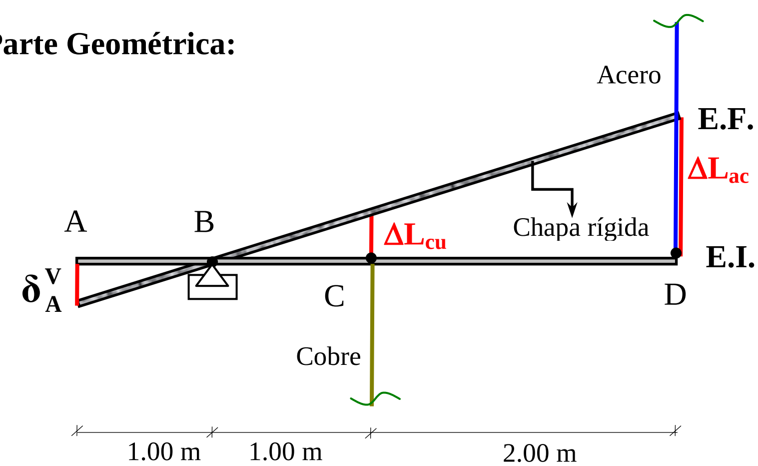
$\sigma_3 = ?$

$\sigma_4 = ?$

$\delta_V^A = ?$

Solución

a) Parte Geométrica:



$$\frac{\Delta L_{cu}}{1} = \frac{\Delta L_{ac}}{3}$$

$$\boxed{3\Delta L_{cu} = \Delta L_{ac}} \quad ①$$

Ecuación de compatibilidad de deformaciones

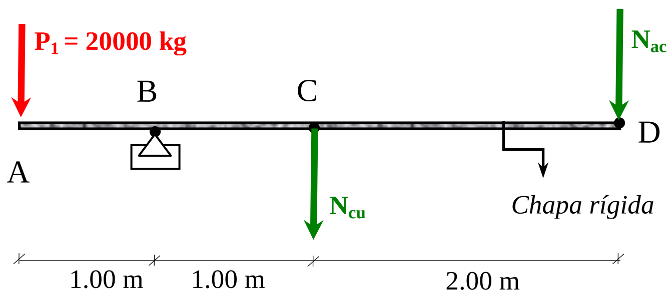
También: $\frac{\delta_v^A}{1} = \frac{\Delta L_{cu}}{1} \Rightarrow \boxed{\delta_v^A = \Delta L_{cu}}$

Propuesta:

ΔL_{cu} = alarga, entonces N_{cu} = tracción

ΔL_{ac} = acorta, entonces N_{ac} = compresión

b) Parte estática



$$\sum M_B = 0$$

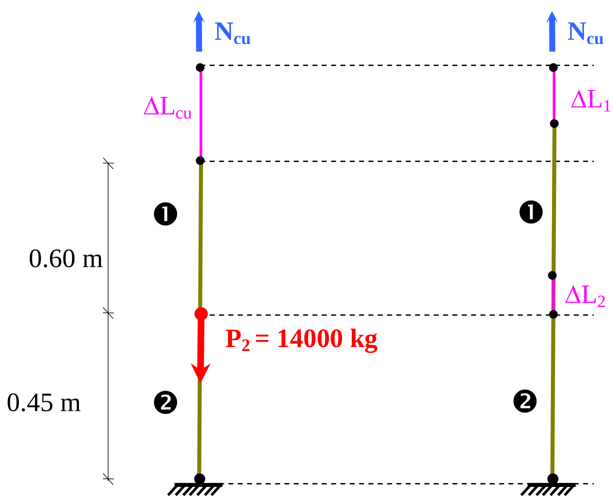
$$2000 * 1 - N_{cu} * 1 - N_{ac} * 3 = 0$$

$$\boxed{N_{cu} + 3N_{ac} = 2000} \quad ②$$

Ecuación equilibrio estático

c) Parte física

Barra Cu:



$$\Delta L_{cu} = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

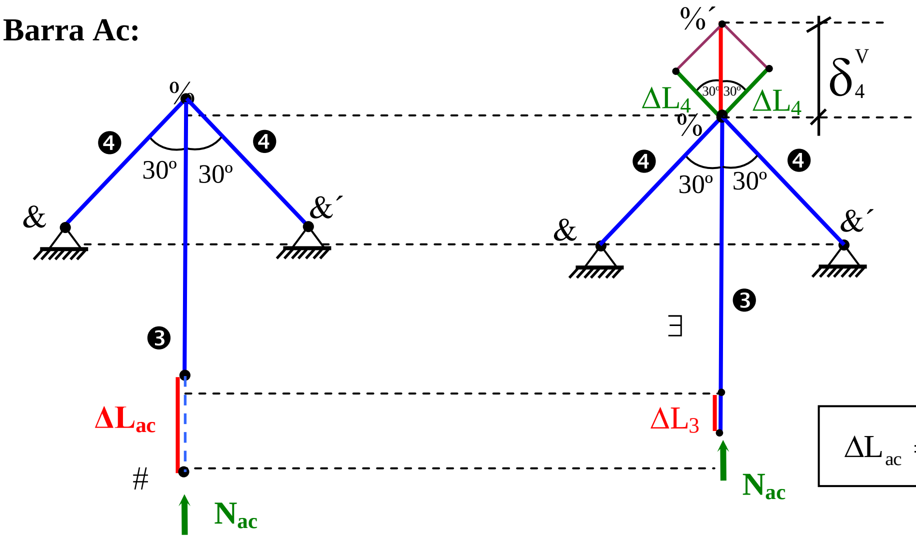
$$\Delta L_1 = \frac{N_1 * L_1}{E_{cu} * A_1} = \frac{N_{cu} * 60}{1.2X10^6 * 6}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 * L_2}{E_{cu} * A_2} = \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2X10^6 * 6}$$

por tanto : $$\boxed{\Delta L_{cu} = \frac{N_{cu} * 60}{1.2X10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2X10^6 * 6}} \quad ③a$$

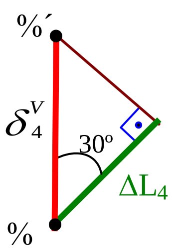
Ecuación física

Barra Ac:



$$\boxed{\Delta L_{ac} = \delta_4^V + \Delta L_3}$$

En el gráfico podemos observar el siguiente triángulo:



$$\cos 30^{o} = \frac{\Delta L_4}{\delta_4^V} \quad \Rightarrow \quad \delta_4^V = \frac{\Delta L_4}{\cos 30^{o}}$$

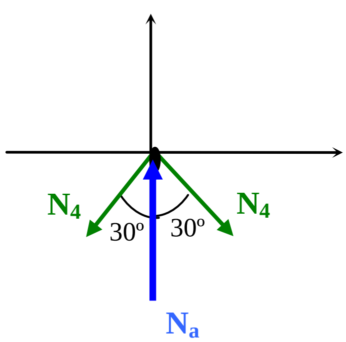
entonces: $$\Delta L_{ac} = \frac{\Delta L_4}{\cos 30^{o}} + \Delta L_3$$

pero:

$$\Delta L_3 = \frac{N_3 * L_3}{E_{ac} * A_2} = \frac{N_{ac} * 90}{E_{ac} * 6} = \frac{N_{ac} * 90}{2.1X10^6 * 6}$$

$$\Delta L_4 = \frac{N_4 * L_4}{E_{ac} * A_4} = \frac{N_4 * \frac{60}{\cos 30^{o}}}{E_{ac} * 4} = \frac{N_4 * 60}{2.1X10^6 * 4 * \cos 30^{o}}$$

Cálculo de N_4



$$\sum F_V = 0$$

$$2N_4 \cos 30^{o} - N_{ac} = 0$$

$$\boxed{N_4 = \frac{N_{ac}}{2 * \cos 30^{o}}}$$

$$\Delta L_4 = \frac{N_{ac} * 60}{2.1X10^6 * 8 * \cos^2 30^{o}}$$

Reemplazando luego en la ecuación de deformación de la barra de acero:

$$\boxed{\Delta L_{ac} = \frac{N_{ac} * 60}{2.1X10^6 * 8 * \cos^3 30^o} + \frac{N_{ac} * 90}{2.1X10^6 * 6}} \quad ③b$$

Ecuación física

c) Parte final

Reemplazando las ecuaciones físicas ③a y ③b en ①

$$3 * \left[\frac{N_{cu} * 60}{1.2X10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2X10^6 * 6} \right] = \frac{N_{ac} * 60}{2.1X10^6 * 8 * \cos^3 30^o} + \frac{N_{ac} * 90}{2.1X10^6 * 6}$$

$$N_{ac} = \frac{3 * \left[\frac{N_{cu} * 60}{1.2X10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2X10^6 * 6} \right]}{\frac{60}{2.1X10^6 * 8 * \cos^3 30^o} + \frac{90}{2.1X10^6 * 6}}$$

$$\boxed{N_{ac} = 1.98 N_{cu} + 1.48 (N_{cu} - 14000)} \quad ④$$

④ en ②

$$N_{cu} + 3[1.98 N_{cu} + 1.48(N_{cu} - 14000)] = 2000$$

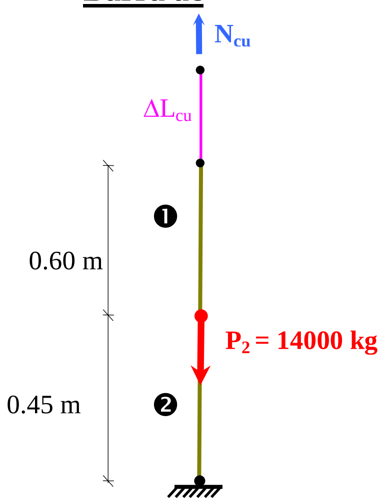
$$\boxed{N_{cu} = 5637.96 \text{ k}} \quad ⑤ \qquad \text{Tracción}$$

⑤ en ④

$$\boxed{N_{ac} = -1212.66 \text{ k}} \qquad \text{Tracción}$$

- **Calculo de Tensiones y Deformaciones de las barras elasticas**

Barra ac



$N_1 = N_{cu} = 5637.93$ k (Tracción)

$N_2 = N_{cu} - P_2 = -8362.07$ k (Compresión)

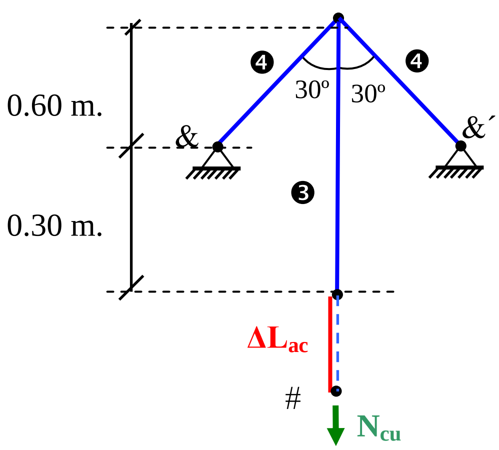
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{5637.93}{6} = 939.66\,\frac{k}{cm^2} \quad \text{(Tracción)}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{8362.07}{6} = 1393.68\,\frac{k}{cm^2} \quad \text{(Compresión)}$$

$$\Delta L_{cu} = \frac{N_{cu} * 60}{1.2X10^6 * 6} + \frac{(N_{cu} - 14000) * 45}{1.2X10^6 * 6}$$

$$\Delta L_{cu} = -5.28x10^{-3}\,cm \quad \text{(Acortamiento)}$$

Barra ac



$N_3 = N_{ac} = 1212.66$ k (Tracción)

$$N_4 = \frac{N_{ac}}{2 * \cos 30º} = 700.13k \quad \text{(Compresión)}$$

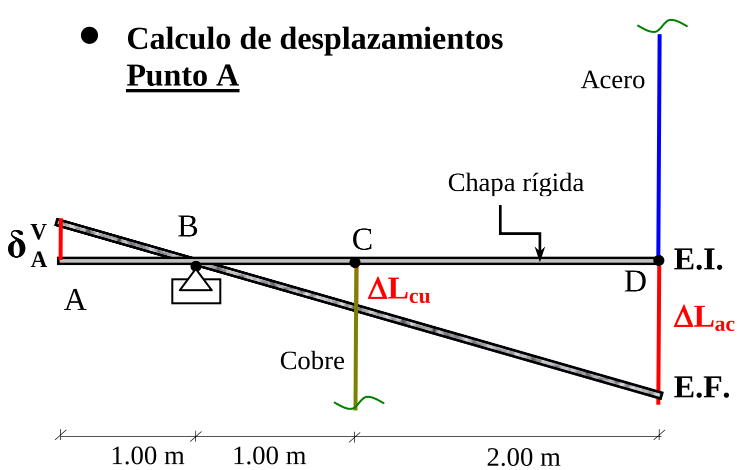
$$\sigma_3 = \frac{N_{31}}{A_3} = \frac{1212.66}{6} = 202.11\,\frac{k}{cm^2} \quad \text{(Tracción)}$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{700.13}{4} = 175.03\,\frac{k}{cm^2} \quad \text{(Compresión)}$$

$$\Delta L_{ac} = \frac{N_{ac} * 60}{2.1X10^6 * 8 * \cos^3 30º} + \frac{N_{ac} * 90}{2.1X10^6 * 6}$$

$$\Delta L_{ac} = 15.33x10^{-3}\,cm \quad \text{(Alarga)}$$

- **Calculo de desplazamientos**
  Punto A



De acuerdo a los resultados el desplazamiento real es el que muestra el esquema, siendo:

$$\delta_v^A = \Delta L_{cu} = 5.28x10^{-3} cm.$$

Ejemplo 4:

Sea el sistema estructural colgante que consta de tres barras elásticas unidas en B, determinar el desplazamiento horizontal y vertical del punto B y las tensiones en cada barra.

Datos

$A_1 = A_2 = A_3 = A = 6\ cm^2$

$E = 2X10^6\ Kg/cm^2$

Incógnitas:

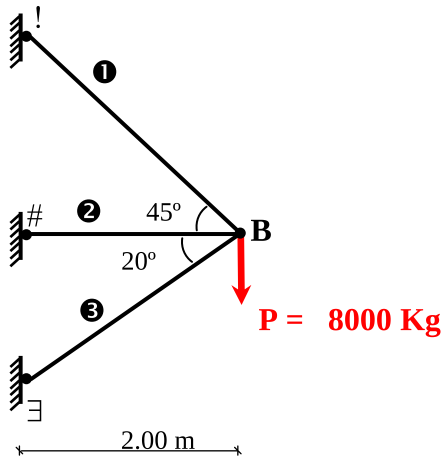
σ_1

σ_2

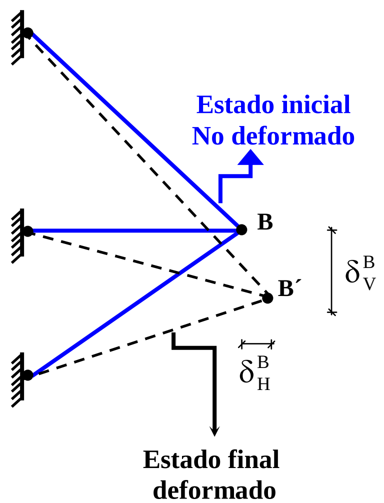
σ_3

δ_V^B

δ_H^B

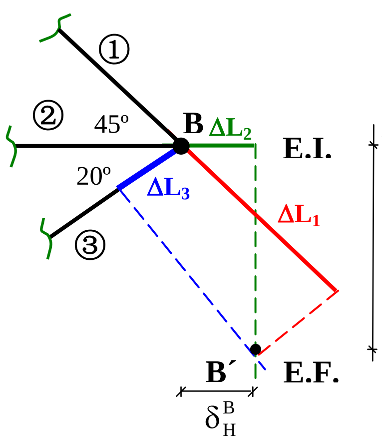


Solución:



Propuesta de deformacion

a) **Parte Geométrica**



Propuesta:

ΔL_1 = alarga, entonces N_1 (tracción)

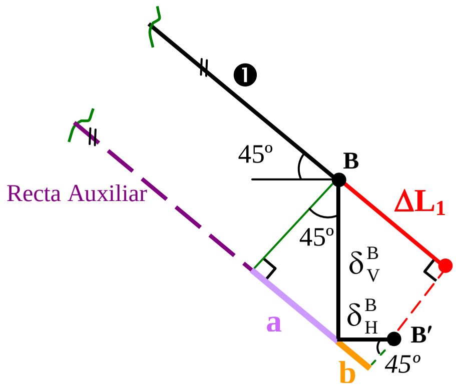
ΔL_2 = alarga, entonces N_2 (tracción)

ΔL_3 = acorta, entonces N_3 (compresión)

Analizando barra por barra colocando las deformaciones de las barras en función de los desplazamientos vertical y horizontal del punto B, tenemos :

$$\Delta L_i = f(\delta_V, \delta_H)$$

Barra 1:



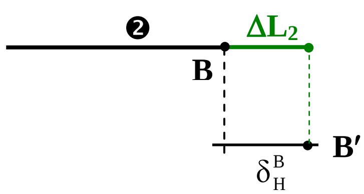
$$\Delta L_1 = a + b$$

$$\text{sen}45^o = \frac{a}{\delta_V^B} \rightarrow a = \delta_V^B \,\text{sen}45^o$$

$$\cos 45^o \frac{b}{\delta_H^B} \rightarrow b = \delta_H^B \cos 45^o$$

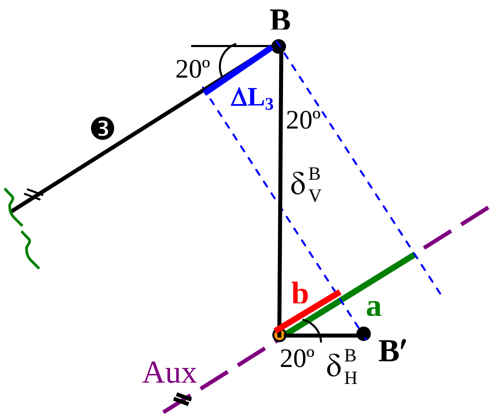
$$\boxed{\Delta L_1 = \delta_V^B \,\text{sen}45^o + \delta_H^B \cos 45^o} \quad ❶$$

Barra 2



$$\boxed{\Delta L_2 = \delta_H^B} \quad ❷$$

Barra 3



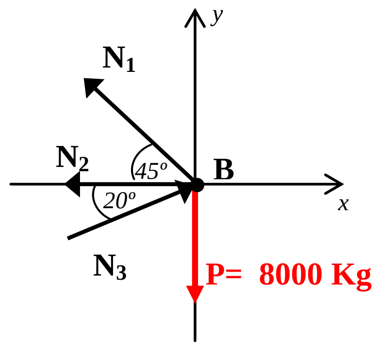
$$\Delta L_3 = a - b$$

$$\text{sen}20^o = \frac{a}{\delta_V^B} \rightarrow a = \delta_V^B \,\text{sen}20^o$$

$$\cos 20^o \frac{b}{\delta_H^B} \rightarrow b = \delta_H^B \cos 20^o$$

$$\boxed{\Delta L_3 = \delta_V^B \,\text{sen}20^o - \delta_H^B \cos 20^o} \quad ❸$$

b) Parte estática



$$\sum F_V = 0$$

$$\boxed{N_1 sen45^o + N_3 sen20^o = 8000} \quad ❹$$

$$\sum F_H = 0$$

$$\boxed{-N_1 \cos 45^o - N_2 + N_3 \cos 20^o = 0} \quad ❺$$

c) Parte Física

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_1 &= \frac{N_1 * \dfrac{200}{\cos 45^o}}{E * A} \\ \Delta L_2 &= \frac{N_2 * 200}{E * A} \\ \Delta L_3 &= \frac{N_3 * \dfrac{200}{\cos 20^o}}{E * A} \end{aligned}\right\} ❻$$

d) Parte final

Remplazando las expresiones ⑥ en las ecuaciones ①, ② y ③ tenemos:

$$\frac{N_1.L}{E.A.Cos45^o} = \delta_V^B Sen\,45^O + \delta_V^B Cos45^O \quad ⑦$$

$$\frac{N_2.L}{E.A} = \delta_H^B \quad ⑧$$

$$\frac{N_3.L}{E.A.Cos20^o} = \delta_V^B Sen\,20^O - \delta_V^B Cos20^O \quad ⑨$$

Que conjuntamente con las expresiones ④ y ⑤ forman las cinco ecuaciones con cinco incognitas para resolver.

$$N_1 \operatorname{sen}45^o + N_3 \operatorname{sen}20^o = 8000 \quad ④$$

$$-N_1\cos 45^o - N_2 + N_3\cos 20^o = 0 \quad ⑤$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones nos da como resultado lo siguiente:

$$N_1 = 8449.32\ k \Rightarrow \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 1408.22\frac{k}{cm^2} \quad \text{(Traccion)}$$

$$N_2 = -408.91\ k \Rightarrow \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 68.15\frac{k}{cm^2} \quad \text{(Compresion)}$$

$$N_3 = 5922.74\ k \Rightarrow \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = 987.12\frac{k}{cm^2} \quad \text{(Compresion)}$$

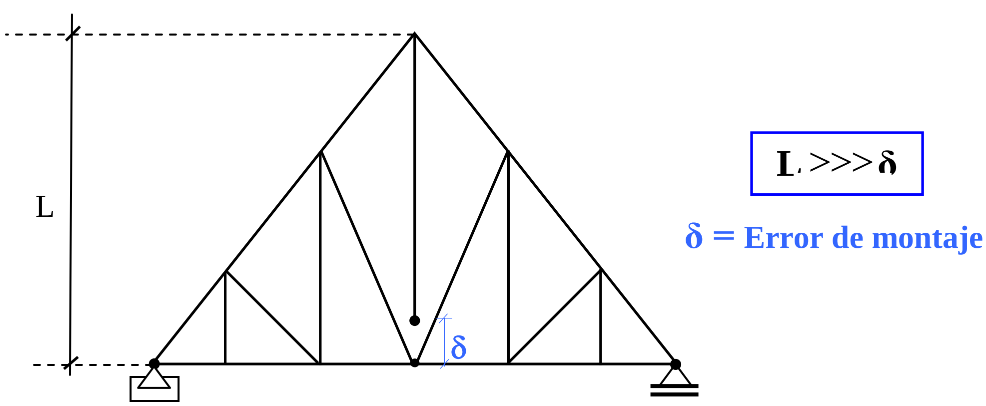
$$\delta_H^B = -0.0068\ cm \quad \text{(Se desplaza del punto B hacia la izquierda)}$$

$$\delta_V^B = 0.2885\ cm \quad \text{(Se desplaza del punto B hacia abajo)}$$

El signo negativo que aparecen en los resultados solamente significa que el sentido es contrario al asumido en la propuesta.

3.4.2 Problemas debido a error de montaje:

Son aquellas tensiones que aparecen en los sistemas estructurales debido a la aplicación de una fuerza momentánea para corregir algún error de dimensión que haya tenido alguno de los elementos, producto de una falla en la fabricación de los mismos, es bueno aclarar que este error de dimension debe ser pequeño en relación a las dimensiones del elemento a corregir.



Existen dos posibilidades si deseamos corregir el error de dimension de la barra central de la cercha metálica mostrada en la figura:

- fabricar otra barra con la dimensión correcta
- Aplicar una fuerza momentánea de tal forma de deformar la barra hasta ponerla en su sitio.

El caso que nos interesa es el segundo ya que nos ahorraríamos el costo y el trabajo de fabricar otra barra, pero este caso produce esfuerzos en las demás barras del sistema, siendo necesario verificar estas tensiones de tal manera de asegurar que no fallen producto de la corrección realizada. En este inciso se aprenderá a calcular dichas tensiones, para lograr este objetivo procederemos a analizar los sistemas estructurales que tengan error de montaje en alguno de sus elementos siguiendo la metodología aprendida en el inciso anterior.

Ejemplo 5:

Sea el sistema estructural de la figura que consta de tres barras elásticas, por error de fabricación la barra central es mas corta de lo que necesita. Determinar las tensiones en todas las barras elásticas producto del error de montaje (δ)

<u>Datos</u>

E

$A_1 = A_2 = A$

L

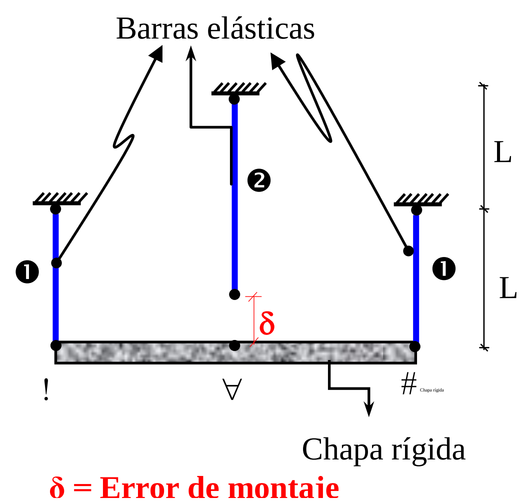
δ = Error de montage

<u>Incógnitas</u>

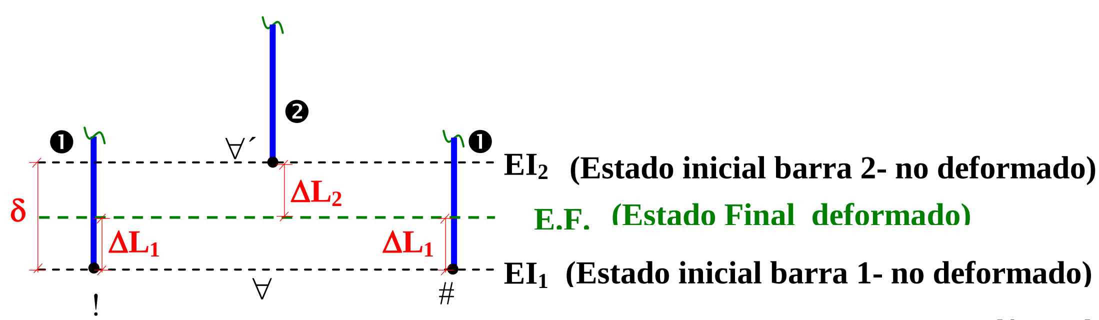
$\sigma_1 = ?$

$\sigma_2 = ?$

Solución:



a) Parte Geométrica:

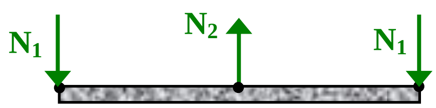


$$\boxed{\Delta L_1 + \Delta L_2 = \delta}$$ ① Ecuación de compatibilidad de deformaciones

ΔL_1 = acorta, entonces N_1 (compresión)

ΔL_2 = alarga, entonces N_2 (tracción)

b) Parte estática:



$$\sum F_V = 0$$

$$\boxed{2N_1 - N_2 = 0}$$ ②

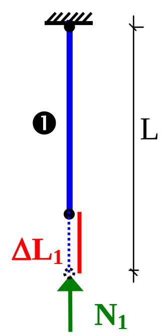
Ecuación equilibrio estático

c) Parte física

Barra Cu:

$$\boxed{\Delta L_1 = \frac{N_1 * L}{E * A}}$$ ③a

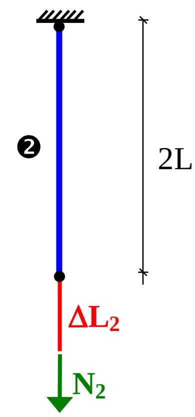
Ecuación física



Barra Ac:

$$\boxed{\Delta L_2 = \frac{N_2 * 2L}{E * A}}$$ ③b

Ecuación física



c) Parte final

Reemplazando las ecuaciones físicas ③a y ③b en ①

$$\delta = \frac{N_1 * L}{E * A} + \frac{N_2 * 2L}{E * A}$$ ④

De la expresión ② tenemos que : $\boxed{N_2 = 2N_1}$ ⑤

Remplazando ⑤ en ④ tenemos: $\delta = \dfrac{N_1 * L}{E * A} + \dfrac{2N_1 * 2L}{E * A}$

Despejando tenemos:

$$\boxed{\begin{aligned} N_1 &= \frac{5.\delta.E.A}{L} \\ N_2 &= \frac{10.\delta.E.A}{L} \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N_1}{A_1} = \frac{5.\delta.E}{L} \\ \sigma_2 &= \frac{N_2}{A_2} = \frac{10.\delta.E}{L} \end{aligned}}$$

3.5 Problemas debido a la variación de temperatura

La mayor parte de los materiales usados en la ingenieria debido a las variaciones de temperatura sufren cambio de sus dimensiones. Si la temperatura aumenta el material se dilata o se alarga, mientras que si la temperatura disminuye, el material se contrae o se acorta. Si el material es homogéneo y isòtropo,se ha encontrado que la deformación de un elemiento debido a la variacion de la temperatura viene dada por:

$$\boxed{\delta_t = \alpha * \Delta t * L}$$

donde:

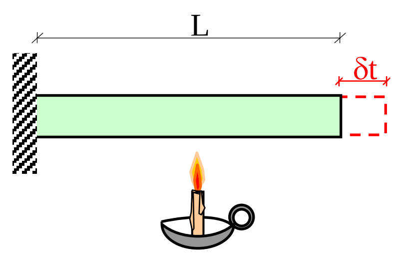
α: Coeficiente de dilatación térmica del material.

$\Delta t = | t_f - t_i |$:Variación de temperatura

t_f = Temperatura final.

t_i = Temperatura inicial.

L = Longitud del elemento estructural.



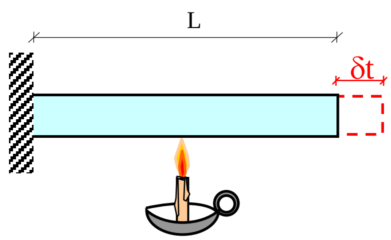
$\Delta t = | + |$, entonces el material se alarga debido al calentamiento.

$\Delta t = | - |$, entonces el material se acorta debido al enfriamiento.

Tabla de coeficiente de dilatación

Material	**α (ºC^{-1})**
Acero	$11.6X10^{-6}$
Aluminio	$23.4X10^{-6}$
Bronce	$18.0X10^{-6}$
Fundición Gris	$10.8X10^{-6}$
Latón	$18.7X10^{-6}$
Cobre	$18.0X10^{-6}$

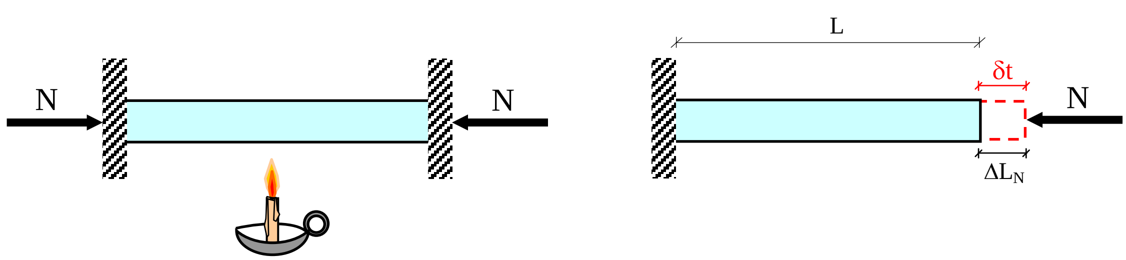
En los sistemas estaticamente determinados se dejan deformar libremente los elementos debido al cambio de temperatura (Δt), este efecto no produce tensiones o esfuerzos en los elementos.



$$\boxed{\delta_t = \text{libre} \Rightarrow \sigma = 0}$$

En cambio en sistemas estaticamente indeterminados las deformaciones debido a la variacion de temperatura suelen estar restringidos parcial o totalmente, como resultado de ello aparecen fuerzas internas que contrarestan parcial o toltalmente, estas deformaciones. Las tensiones originadas por estas fuerzas internas se las llama **tensioines tèrmicas o esfuerzos termicos.**

La determinacion de las tensiones tèrmicas puede efectuarse usando la metodologia delineados anteriormente, la unica salvedad es que en la parte geometrica se debe incluir un estado de deformación producido por la variacion tèrmica dejando al elemento deformar libremente por la variacion de temperatura de tal forma que el efecto de contrarestar esta deformación sea la que ocaciona tension.



$$\boxed{\delta_t = \text{Restrigida} \Rightarrow \sigma \neq 0}$$

Ejemplo 6:

Determinar la tensión que aparecerà en una varrilla de acero de 2.50m, cuya sección es de 12cm^2 al decender la temperatura a -20 ^{o}C, si la tensión de la varrilla es nula a los +20 ^{o}C. Para los siguiente casos:

a. Muros completamente rìgidos e indeformables.
b. Muros que ceden ligeramente, acortàndose su distancia en 0.5 mm.

Datos

$L = 2.50$ m.

$A = 12\ cm^2$

$t_i = +20\ ^oC$

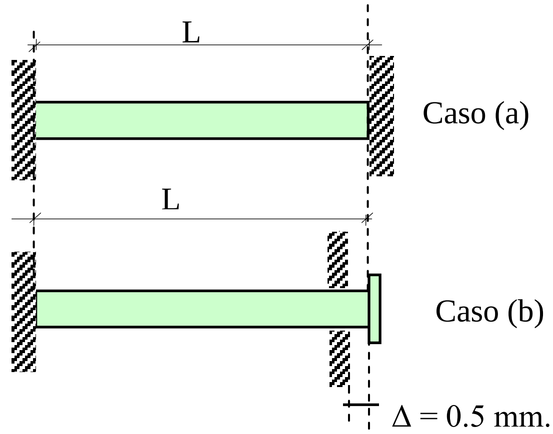
$t_f = -20\ ^oC$

$\Delta t = |t_f - t_i| = |-40|\ ^oC$

$\alpha = 11.70x10^{-6}\ (^oC)^{-1}$

$E_{ac} = 2.1X10^6\ Kg/cm^2$

$\Delta = 0.5$ mm.



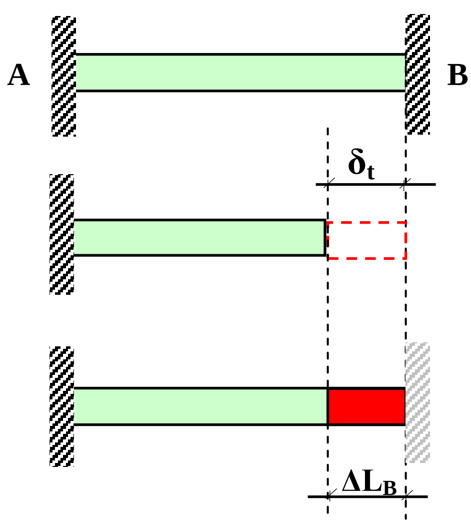
Incógnitas

Caso (a) ⟶ σ =?

Caso (b) ⟶ σ =?

Solución: **Caso (a): Muros rigidos**

a) Parte Geométrica



Estado inicial no deformado

Estado deformado Δt: se deja deformar libremente (no produce tensión)

Estado Final o Estado de equilibrio:se obliga al elemento a deformarse hasta llegar a la posición de equilibrio (produce tensión).

$\boxed{\delta t = \Delta L_B}$ ① **Ecuación de compatibilidad de deformación**

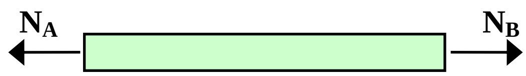
Donde:

$\delta t = \alpha.\Delta t.L$ deformación debido a la variacion de temperatura

ΔL_B = Alargamiento ⟹ N_B = Tracción

b) Parte estática:

Para que se produzca ΔL_B obligatoriamente esta ha tenido que ser ocasionada por una fuerza interna N_B, quedando el sistema de equilibrio de la siguiente manera:



$$\boxed{\sum \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N_A} = \mathbf{N_B}}$$ **② Ecuación de equilibrio estático**

c) Parte física:

Planteamos la ley de Hooke para relacionar las deformaciones con las fuerzas aplicadas de cada elemento, para nuestro caso:

$$\boxed{\Delta L_B = \frac{N_B.L}{E.A}}$$ **③ Ecuación fisica**

d) Parte final:

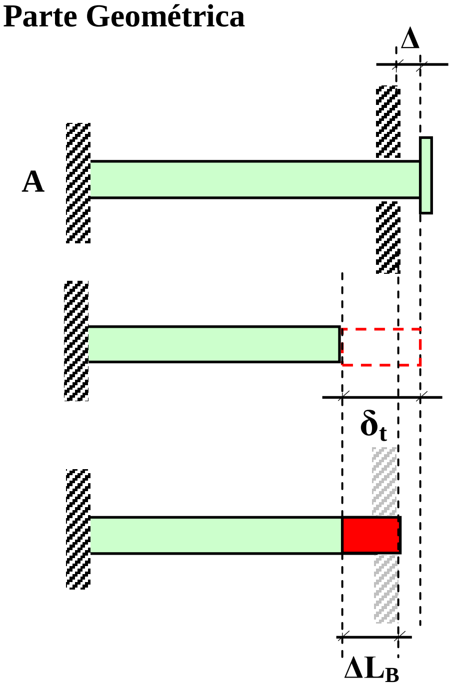
Remplazamos ③ en ① y tenemos:

$$\alpha.\Delta t.L = \frac{N_B.L}{E.A} \Rightarrow N_B = \alpha.\Delta t.E.A \Rightarrow \sigma = \frac{N_B}{A} \Rightarrow \sigma = \alpha.\Delta t.E$$

Remplazando los datos tenemos: $\boxed{\sigma = 982.80 \ \frac{k}{cm^2}}$ **Respuesta Caso (a)**

Solución: **Caso (b): Muros deslizables**

a) Parte Geométrica



Estado inicial no deformado

Estado deformado Δt: se deja deformar libremente (no produce tensión)

Estado Final o Estado de equilibrio:se obliga al elemento a deformarse hasta llegar a la posición de equilibrio (produce tensión).

$$\boxed{\delta t = \Delta L_B + \Delta}$$

① **Ecuación de compatibilidad de deformación**

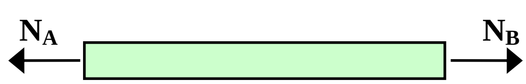
Donde:

$\delta t = \alpha.\Delta t.L$ deformación debido a la variacion de temperatura

ΔL_B = Alargamiento $\Longrightarrow$ N_B = Tracción

b) Parte estática:

Para que se produzca ΔL_B obligatoriamente esta ha tenido que ser ocasionada por una fuerza interna N_B, quedando el sistema de equilibrio de la siguiente manera:



$$\boxed{\sum N = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A = N_B}$$

② **Ecuación de equilibrio estático**

c) Parte física:

Planteamos la ley de Hooke para relacionar las deformaciones con las fuerzas aplicadas de cada elemento, para nuestro caso:

$$\boxed{\Delta L_B = \frac{N_B.L}{E.A}}$$

③ **Ecuación fisica**

d) Parte final:

Remplazamos ③ en ① y tenemos:

$$\alpha.\Delta t.L = \frac{N_B.L}{E.A} + \Delta \Rightarrow N_B = \frac{(\alpha.\Delta t.L - \Delta).E.A}{L} \Rightarrow \sigma = \frac{N_B}{A} \Rightarrow \sigma = \frac{(\alpha.\Delta t.L - \Delta).E}{L}$$

Remplazando los datos tenemos: $\boxed{\sigma = 562.80\ \frac{k}{cm^2}}$ **Respuesta Caso (b)**

Ejemplo 7:

Sea el sistema estructural mostrado en la figura que está sometida la barra de latón a una diferencia de temperatura de - 30ºC y la barra de acero a +30ºC, calcular los esfuerzos o tensiones en las barras de latón y acero.

<u>Datos</u>

$A_L = 7\ cm^2$

$\alpha_L = 18.7X10^{-6}\ {}^oC^{-1}$

$E_L = 1X10^6\ Kg/cm^2$

$A_{ac} = 3\ cm^2$

$\alpha_{ac} = 11.6X10^{-6}\ {}^oC^{-1}$

$E_{ac} = 2X10^6\ Kg/cm^2$

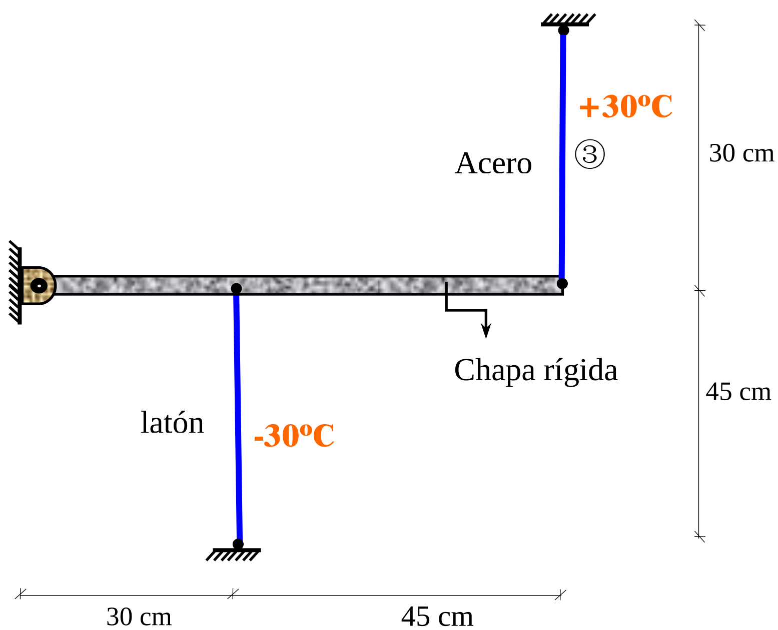
$\Delta t_{ac} = +30^o C$

$\Delta t_{lat} = -30^o C$

<u>Incógnitas:</u>

σ_L

σ_{ac}

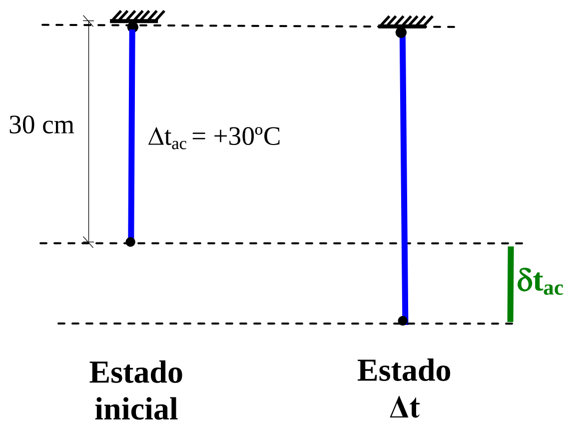


Solución

a) Parte Geométrica

a1) Deformación debido a la variación de la temperatura (Δti)

Acero:

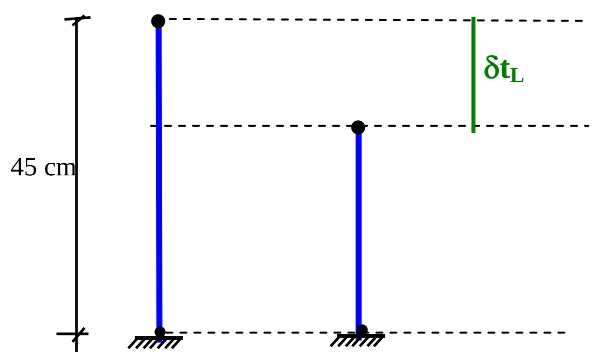


$$\delta t_{ac} = \alpha_{ac} * \left| \Delta t_{ac} \right| * L_{ac}$$

$$\delta t_{ac} = 11.6X10^{-6} * \left| 30 \right| * 30$$

$$\boxed{\delta t_{ac} = 0.0104 \text{ cm}}$$ **alarga**

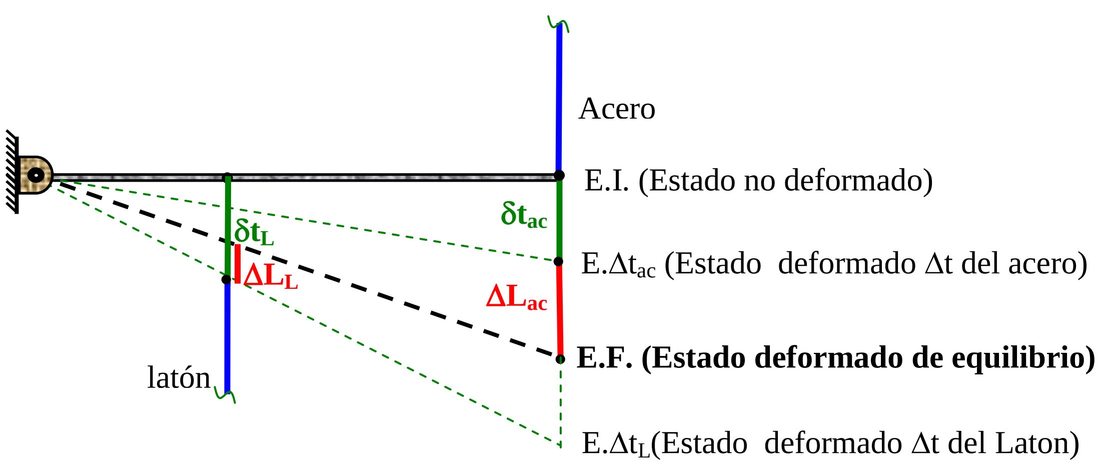
Latón:



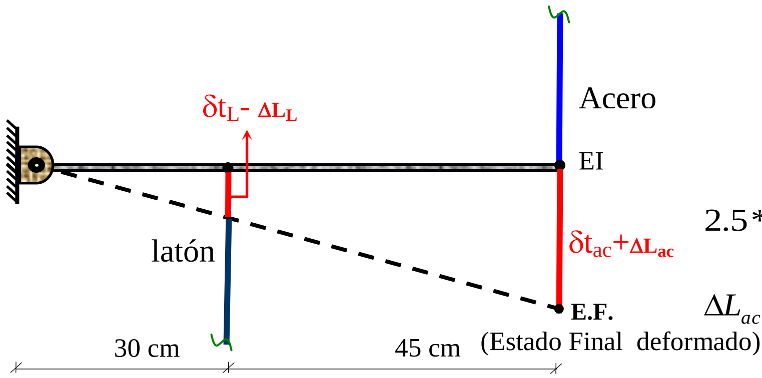
$$\delta t_{L} = \alpha_{L} * \left| \Delta t_{L} \right| * L_{L}$$

$$\delta t_{L} = 18.7X10^{-6} * \left| -30 \right| * 45$$

$$\boxed{\delta t_{L} = 0.0252 \text{ cm}}$$ ***acorta***



Redefiniendo:



$$\frac{\delta t_L - \Delta L_L}{30} = \frac{\delta t_{ac} - \Delta L_{ac}}{75}$$

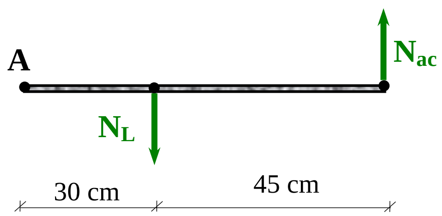
$$2.5*(\delta t_L - \Delta L_L) = \delta t_{ac} - \Delta L_{ac}$$

$$\Delta L_{ac} + 2.5\Delta L_L = 2.5\delta t_L - \delta t_{ac}$$

① $$\boxed{\Delta L_{ac} + 2.5\Delta L_L = 0.0526}$$

Ecuación de compatibilidad de deformaciones

b) Parte estática:



$$\sum M_A = 0$$

$$\boxed{30N_L - 75N_{ac} = 0}$$ ②

Ecuación equilibrio estático

c) Parte física

Barra de acero

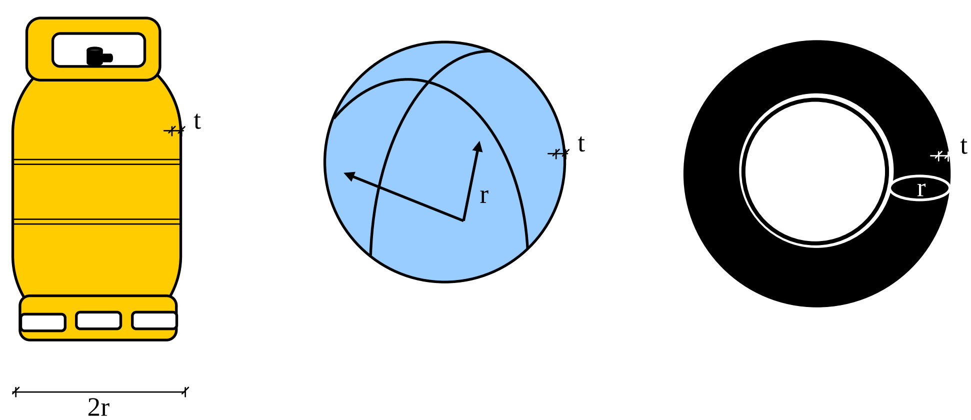
$$\Delta L_{ac} = \frac{N_{ac} * L_{ac}}{E_{ac} * A_{ac}}$$

Barra de Laton

$$\Delta L_L = \frac{N_L * L_L}{E_L * A_L}$$

3.6 Tensiones y deformaciones en cilindros de pared delgada.

Ejemplos



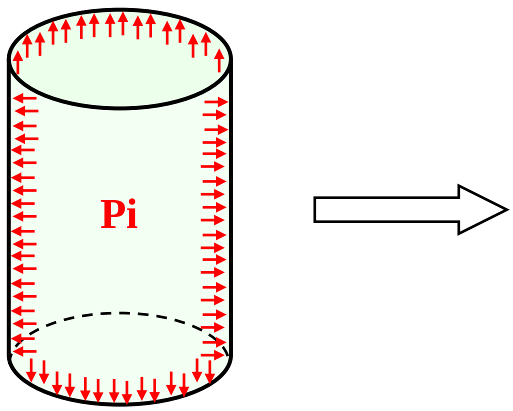
Condicion para ser considerado cilindro de pared delgada

$$\boxed{\frac{r}{10} \geq t}$$

donde: r = radio generador

t = espesor de la pared delgada.

Si existen presiones internas existen tensiones:

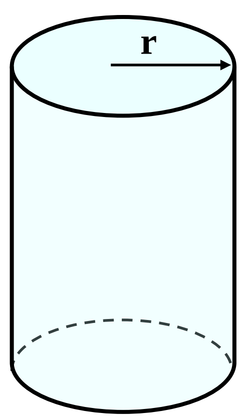


Debido a que partimos de la condicion que el cilindro es de pared delgada, podemos realizar el estudio tensional de forma unidimensional.

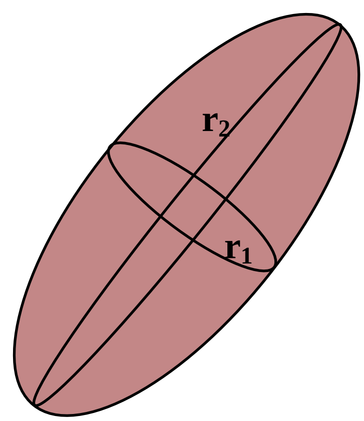
Estudiaremos dos tipos de cilindros de pared delgada.

a) Cilindros generados por un radio de curvatura

b) Cilindros generados por dos radios de curvatura.



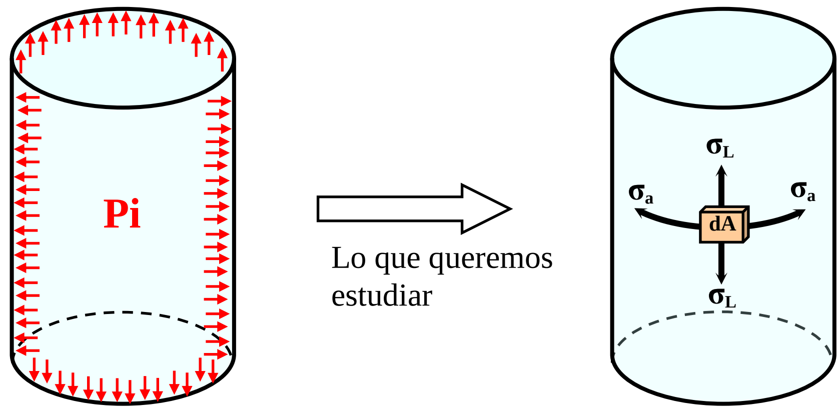
a)



b)

3.6.1 Cilindros de un radio de curvatura:

a) Tensiones:

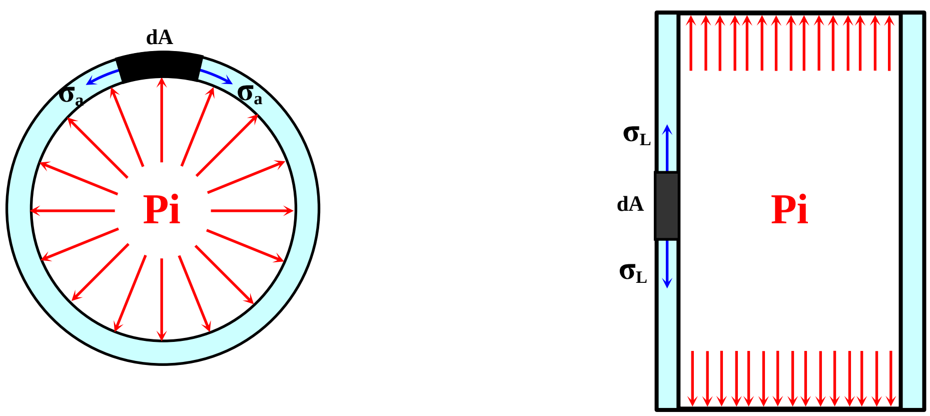


Estado de carga **Estado tensional**

Donde: σa = Tension anular

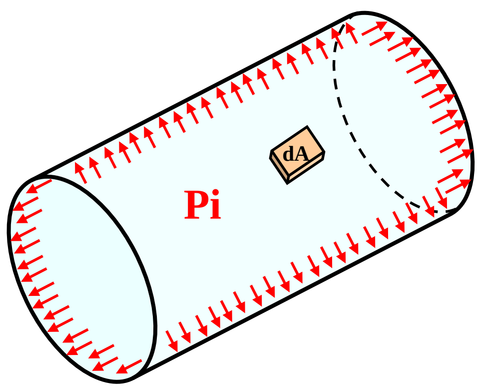
σ_L = Tension longitudinal

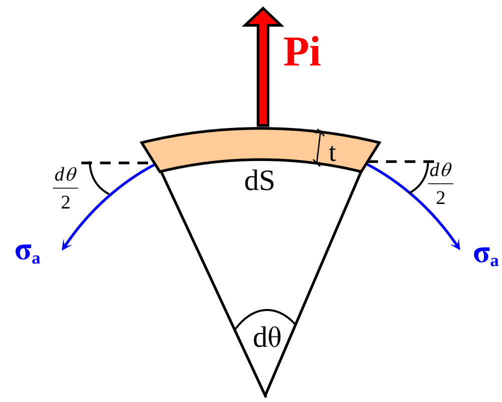
Por separado tenemos:

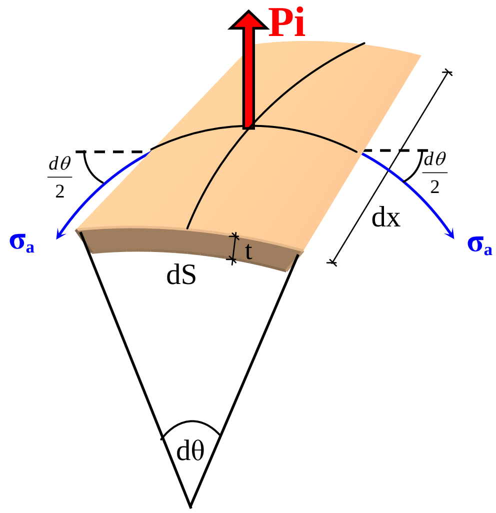


σa = Tension anular σ_L = Tension longitudinal

Analizando el elemento diferencial:







$$\sum F_V = 0$$

$$Pi \cdot dS \cdot dx - 2\sigma_a \cdot t \cdot dx \cdot sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$dS = r \cdot d\theta$$

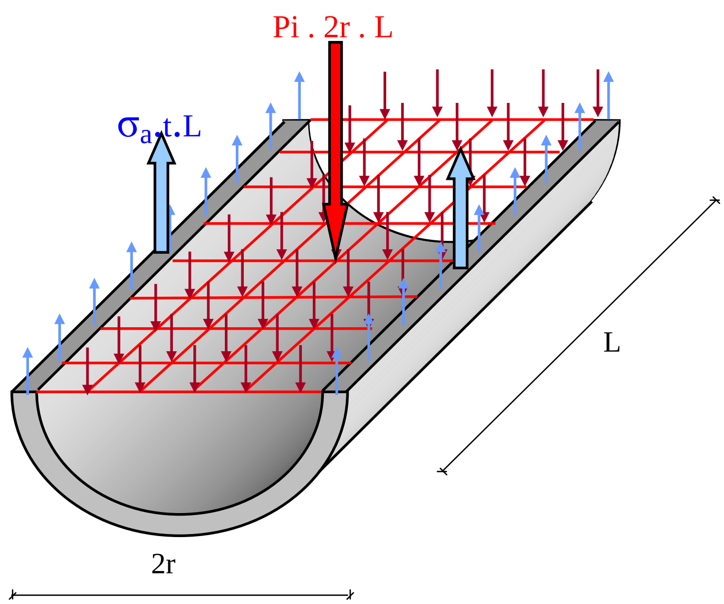
$$\text{si } d\theta \text{ es pequeño, } \Rightarrow \quad sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \frac{d\theta}{2}$$

$$Pi \cdot r \cdot d\theta \cdot dx - 2\sigma_a \cdot t \cdot dx \cdot \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\boxed{\sigma_a = \frac{Pi \cdot r}{t}}$$

Ecuación que gobierna Las tensiones anulares en paredes delgadas de cilindros de un radio de curvatura.

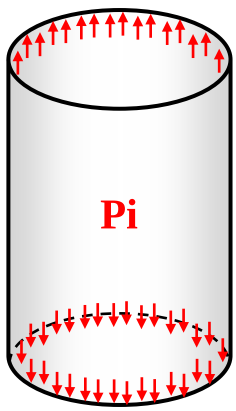
Partiendo del conocimiento que las fuerzas horizontales se anulan:

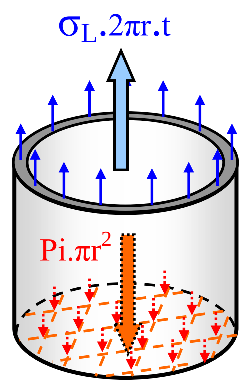


$$\sum V = 0 \longrightarrow Pi \cdot 2r \cdot L = 2\sigma_a \cdot t \cdot L$$

$$\sigma_a = \frac{Pi \cdot r}{t}$$

a₂) Tension Longitudinal:





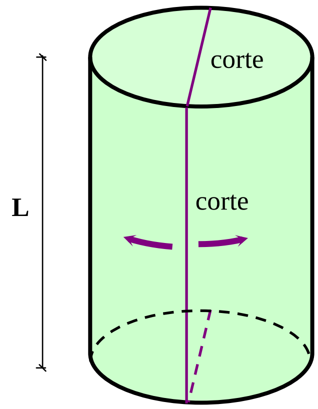
$$\sum F = 0$$

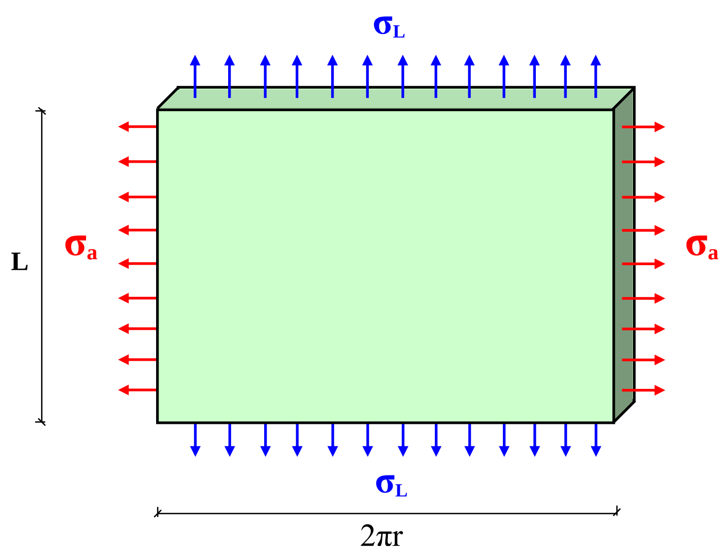
$$\sigma_L \cdot 2\pi r \cdot t = Pi \cdot \pi r^2$$

$$\boxed{\sigma_L = \frac{Pi \cdot r}{2t}}$$

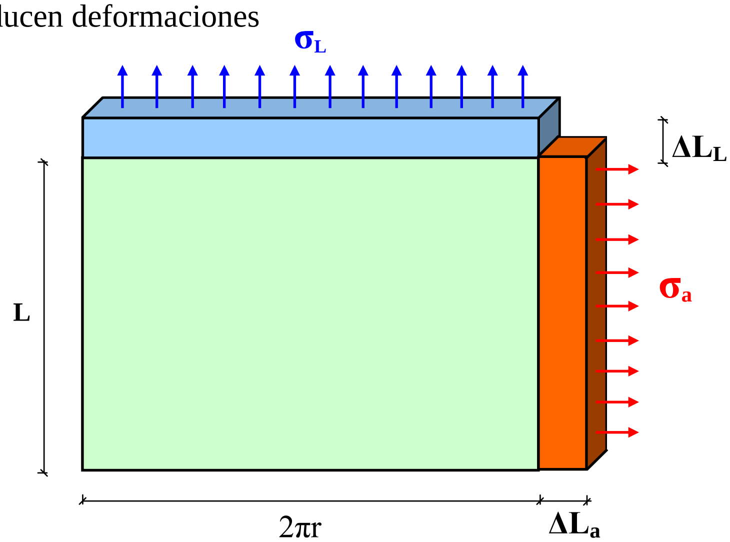
Ecuación que gobierna las tensiones longitudinales en paredes delgadas de cilindros de un radio de curvatura.

b) Deformaciones:





Estas tensiones producen deformaciones



ΔL_a = Deformación del perímetro debido a la σ_a

ΔL_L = Deformación de la longitud debido a la σ_L

Por tanto:

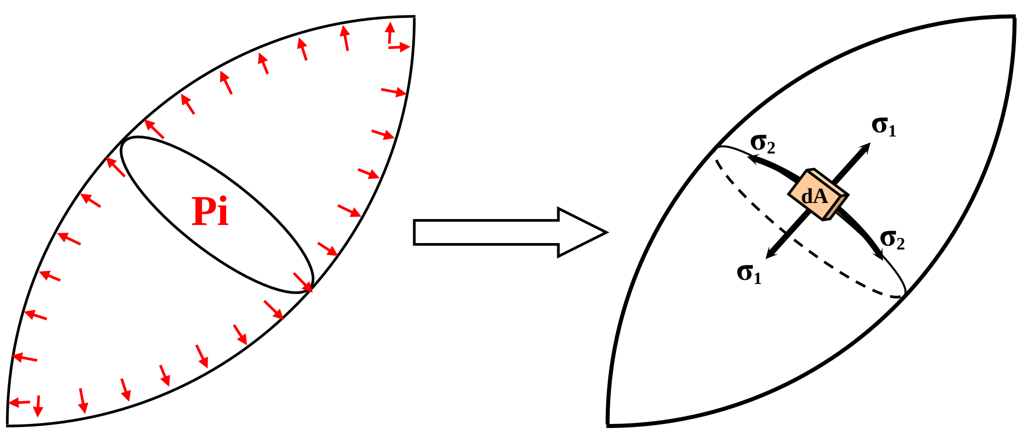
$$\Delta L = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}, \quad \text{Sabiendo que :} \quad \sigma = \frac{N}{A}, \quad \text{entonces} \quad \Delta L = \frac{\sigma \cdot L}{E}$$

luego:

$$\Delta L_a = \frac{\sigma_a \cdot 2\pi r}{E} = \frac{Pi \cdot r}{t}\,\frac{2\pi r}{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L_a = \frac{2\pi r^2 \cdot Pi}{t \cdot E}}$$

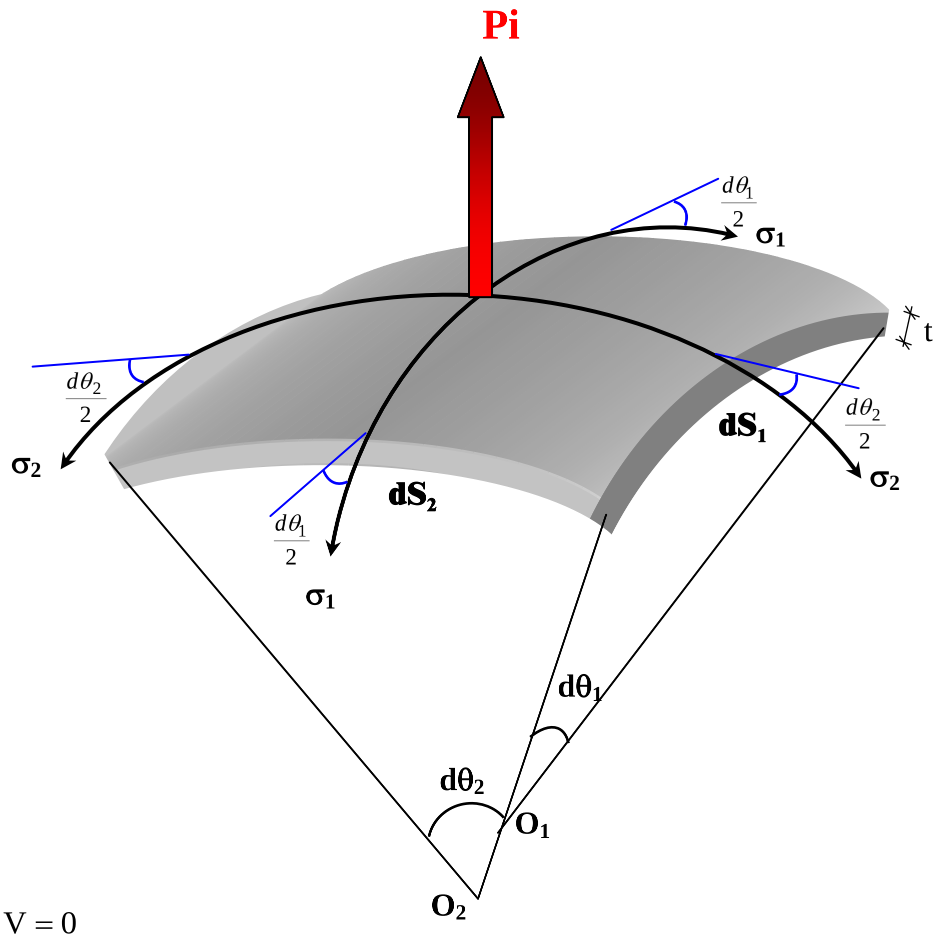
$$\Delta L_L = \frac{\sigma_L \cdot L}{E} = \frac{Pi \cdot r}{2 \cdot t}\,\frac{L}{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta L_a = \frac{L \cdot r \cdot Pi}{2t \cdot E}}$$

3.6.2 Cilindros con dos radios de curvatura:



Estado de carga **Estado tensional**

Analizando el elemento diferencial



$$\sum V = 0$$

$$Pi \cdot dS_1 \cdot dS_2 - 2\sigma_1 \cdot dS_2 \cdot t \cdot sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) - 2\sigma_2 \cdot dS_1 \cdot t \cdot sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0$$

$$dS_1 = r_1 \cdot d\theta_1$$
$$dS_2 = r_2 \cdot d\theta_2$$

si $d\theta_i$ es pequeño, entonces : $sen\left(\frac{d\theta_i}{2}\right) = \frac{d\theta_i}{2}$

Reemplazando:

$$Pi \cdot r_1 \cdot d\theta_1 \cdot r_2 \cdot d\theta_2 - 2\sigma_1 \cdot r_2 \cdot d\theta_2 \cdot t \cdot \frac{d\theta_1}{2} - 2\sigma_2 \cdot r_1 \cdot d\theta_1 \cdot t \cdot \frac{d\theta}{2} = 0$$

$$Pi \cdot r_1 \cdot r_2 = \sigma_1 \cdot r_2 \cdot t + \sigma_2 \cdot r_1 \cdot t \qquad * \quad \frac{1}{r_1 \cdot r_2 \cdot t}$$

$$\boxed{\frac{Pi}{t} = \frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2}}$$

Ecuación que gobierna las tensiones en cilindros de pared delgada con dos radios de curvatura

Ejemplo 7:

Determinar la ecuación que gobierna las tensiones de una pelota de basketball sometida a una presión interna qi.

Datos

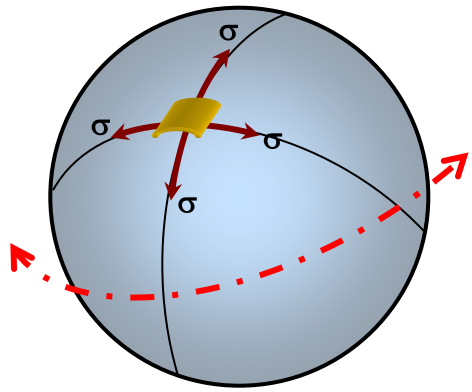
$r_1 = r_2 = r$

t = espesor

qi = presión

Incógnitas

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$



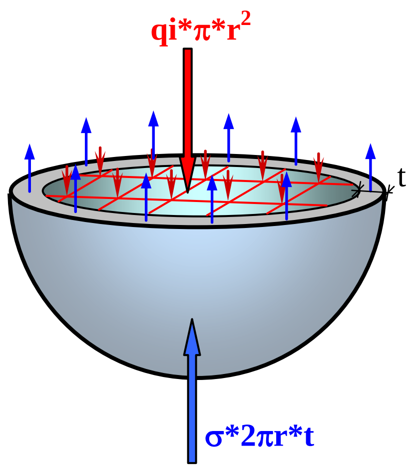
como es una pelota totalmente esférica $r_1 = r_2 = r$

Aplicando la fórmula para un cilindro de pared delgada de dos radios de curvatura tenemos:

$$\frac{qi}{t} = \frac{\sigma}{r} + \frac{\sigma}{r}$$

$$\frac{qi}{t} = \frac{2\sigma}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sigma_{\oplus} = \frac{qi \cdot r}{2t}}$$

Solución seccionando la pelota:



$$\sum V = 0$$

$$qi \cdot \pi \cdot r^2 = \sigma \cdot 2\pi \cdot r \cdot t$$

$$\boxed{\sigma_{\oplus} = \frac{qi \cdot r}{2t}}$$